Esercizi svolti - Modulo 5

1. Il perimetro di una faccia di un cubo è 48 cm. Calcola l'area della superficie laterale[1], di quella totale e il volume del cubo. **Sol.:**

   Indichiamo con l, lo spigolo del cubo, allora $l = 48 : 4 = 12$ cm.
   Sup. laterale $= 4l^2 = 4 \cdot 12^2 = 576$ cm^2
   Sup. totale $= 6l^2 = 6 \cdot 12^2 = 864$ cm^2
   Volume $= l^3 = 12^3 = 1728$ cm^3.

2. L'area della superficie totale di un cubo è 96 cm^2. Calcola il volume di un altro cubo avente lo spigolo doppio di quello del primo. **Sol.:** Indichiamo con l_1 lo spigolo del primo cubo e con l_2 quello del secondo. Allora $l_1 = \sqrt{\frac{96}{6}} = 4$ cm; $l_2 = 2 \cdot 4 = 8$ cm e $V = 8^3 = 512$ cm^3.

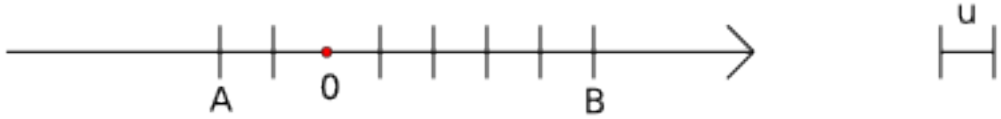
3. Due cubi, i cui spigoli sono lunghi rispettivamente 6 cm e 10 cm, sono sovrapposti. Calcola il volume del solido composto. **Sol.:**
   Indichiamo con V_1 il volume del primo cubo, con V_2 quello del secondo e con V_t il volume del solido composto. Allora si ha che $V_1 = 6^3 = 216$ cm^3; $V_2 = 10^3 = 1000$ cm^3 e $V_t = V_1 + V_2 = 216 + 1000 = 1216$ cm^3.

4. Su una retta cartesiana O_x,

   - rappresenta i punti $A(-2)$ e $B(5)$
   - determina (A, B), (B, A) e $d(A, B)$
   - punto medio M del segmento di estremi $A\left(-\frac{3}{2}\right)$ e $B\left(-\frac{5}{2}\right)$

   Sol.:

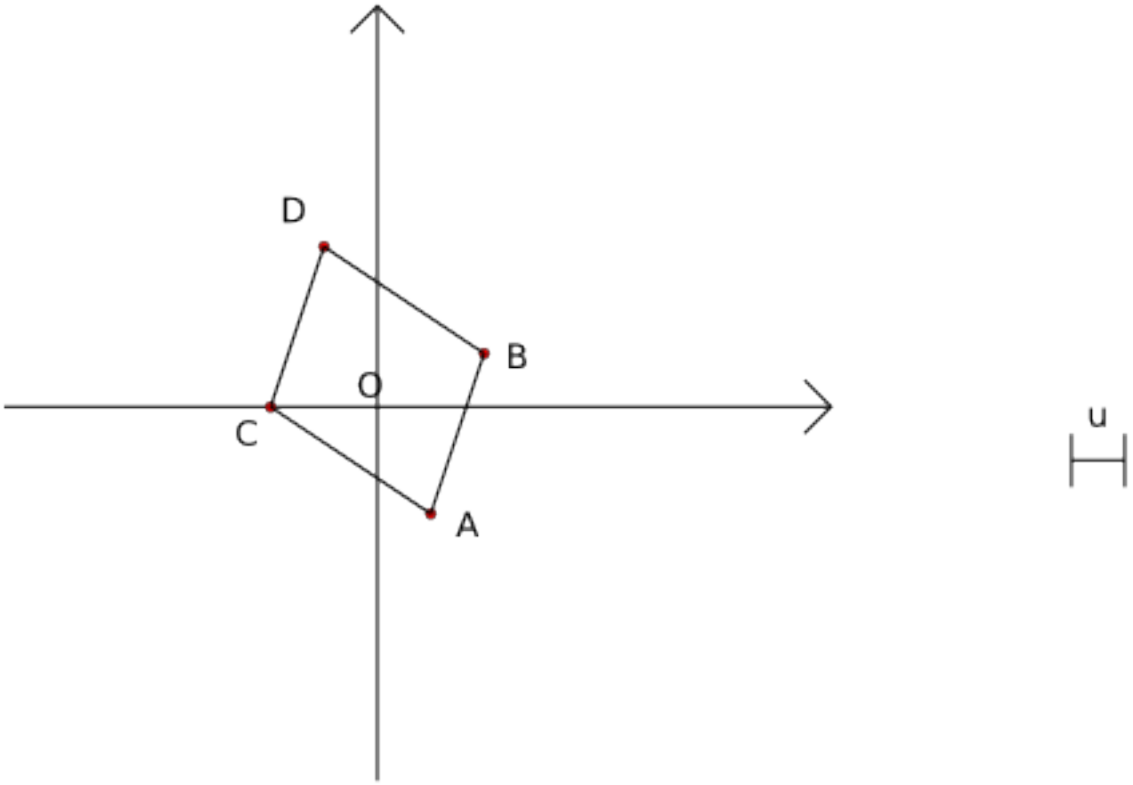
   - rappresenta i punti $A(-2)$ e $B(5)$



[1] Superficie laterale S_l=$4l^2$; Superficie totale $S_t = 6l^2$; Volume $V = l^3$.

- determina $(A,\, B)$, $(B,\, A)$ e $d(A,\, B)$
  $(A,\, B) = 5 - (-2) = 7$;
  $(B,\, A) = -2 - 5 = -7$;
  $d(A,\, B) = |5 - (-2)| = 7$
- punto medio M del segmento di estremi $A(-\frac{3}{2})$ e $B(-\frac{5}{2})$
  $M = \frac{-\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)}{2} = \frac{-\frac{8}{2}}{2} = -2$. $M(-2)$.

5. Sono dati i punti $A(1,\, -2)$, $B(2,\, 1)$ e $C(-2,\, 0)$. Determinare graficamente e analiticamente il quarto vertice D del parallelogramma. **Sol.:**
   Si osservi il disegno.



   Il punto D deve essere tale che $\overline{CD} = \overline{AB}$. Allora uguagliando le rispettive componenti si ricavano le coordinate del punto D.
   $x_D - x_C = x_B - x_A$; $\quad x_D + 2 = 2 - 1$; $\quad x_D + 2 = 1$; $\quad x_D = -1$
   $y_D - y_C = y_B - y_A$; $\quad y_D - 0 = 1 - (-2)$; $\quad y_D = 3$. $D(-1, 3)$.

6. Considerato il quadrilatero ABCD di vertici $A(-3,\, 2)$, $B(\frac{1}{2},\, -1)$, $C(\frac{5}{2},\, 0)$ e $D(0,\, -\frac{17}{5})$. Trovare i vertici del quadrilatero in cui esso viene trasformato dalla traslazione di componenti $(\frac{1}{2},\, -2)$. **Sol.:**
   Si ha che le nuove coordinate sono date da $x' = x + \frac{1}{2}$ e $y' = y - 2$. Allora i punti sono

$$A'\left(-3+\frac{1}{2},\, 2-2\right), \quad B'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\, -1-2\right), \quad C'\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2},\, 0-2\right), \quad D'\left(0+\frac{1}{2},\, -\frac{17}{5}-2\right)$$

$$A'\left(-\frac{5}{2},\,0\right),\quad B'(1,\,-3),\quad C'(3,\,-2),\quad D'\left(\frac{1}{2},\,-\frac{27}{5}\right)$$

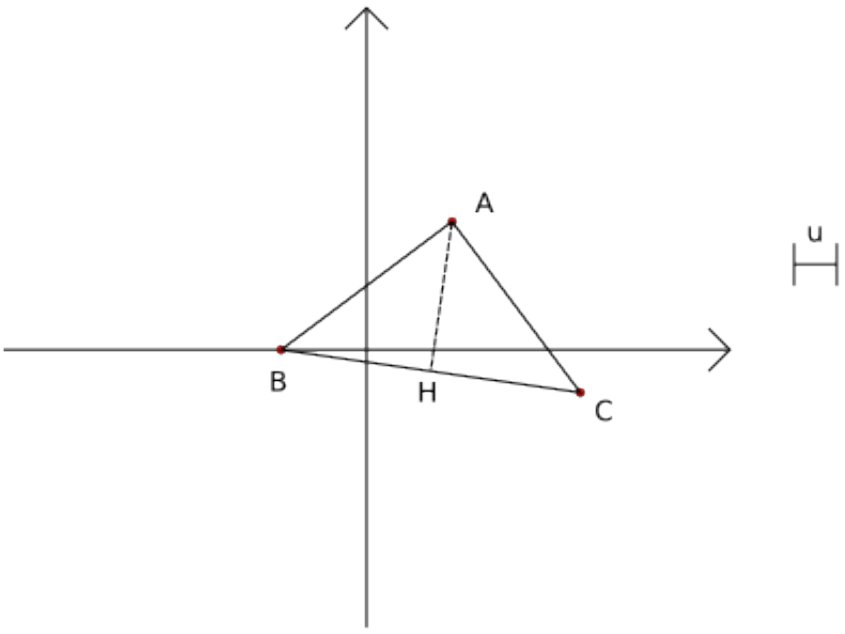
7. Considerato il triangolo di vertici $A\left(\frac{5}{2},\,-\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},\,0\right)$ e $C\left(0,\,\frac{3}{5}\right)$, una traslazione porta A in O. Determinare i punti in cui vengono trasformati B e C. **Sol.:**
   Le componenti della traslazione sono date dalle formule inverse, come segue:
   $a = x' - x = 0 - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$; $b = y' - y = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Allora gli altri punti trasformati saranno
   $$B'\left(-3,\,\frac{2}{3}\right),\quad C'\left(-\frac{5}{2},\,\frac{19}{5}\right)$$

8. Del triangolo ABC si conoscono le coordinate dei vertici $A(2,\,3)$, $B(-2,\,0)$ e $C(5,\,-1)$,

   - verificare che si tratta di un triangolo isoscele
   - calcolare area e perimetro.

   Sol.:

   - verificare che si tratta di un triangolo isoscele
     Verifichiamo che abbia almeno due lati uguali. $\overline{AB} = \sqrt{16+9} = 5$, $\overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5$.
   - calcolare area e perimetro
     Si osservi la figura.



   Risoluzione 1.
   $\overline{BC} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, il semiperimetro $p = (5+5+5\sqrt{2}) : 2 = \frac{5(2+\sqrt{2})}{2}$.

Usiamo la formula di Erone

$$A = \sqrt{\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\left[\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-5\right]^2\left[\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-5\sqrt{2}\right]}$$

Calcoliamo i fattori singolarmente:
$\left[\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-5\right]^2 = [\frac{5\left(2+\sqrt{2}-2\right)}{2}]^2 = \frac{25}{2}$
$\left[\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-5\sqrt{2}\right] = \frac{10+5\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{2} = \frac{10-5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, allora l'area risulta essere pari a

$$A = \sqrt{\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}[\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-5]^2[\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-5\sqrt{2}]} = \sqrt{\frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\cdot\frac{25}{2}\frac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{25\cdot 25\cdot(4-2)}{8}} = \sqrt{\frac{25^2}{4}} = \frac{25}{2}$$

Risoluzione 2.
$\overline{BH} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$
$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{25-\frac{25}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$$A = \frac{5\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{25}{2}$$

Infine calcoliamo il perimetro: $P = 2p = \frac{5(2+\sqrt{2})}{2}\cdot 2 = 5(2+\sqrt{2})$

9. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali O_{xy}, sono assegnati i punti $A\left(\frac{1}{2},\,\frac{2}{3}\right)$ e $B\left(\frac{2}{3},\,\frac{1}{4}\right)$, calcolarne la distanza euclidea, del taxi e di Chebyshev. **Sol.:**
Euclidea $\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4-3}{6}\right)^2+\left(\frac{3-8}{12}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{4+25}{144}} = \frac{\sqrt{29}}{12} \sim 0.4$$

Taxi $d_t = \left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| + \left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{1}{6}+\frac{5}{12} = \frac{7}{12}$
Chebyshev $d_c = \max\left(\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right|,\,\left|\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right|\right) = \max\left(\frac{1}{6},\,\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{12}$